Conceptos Básicos de Probabilidad

Debido a que el proceso de obtener toda la información

relevante a una población particular es difícil y en

muchos casos imposible de obtener, se utiliza una

muestra para estimar la información necesaria para la

toma de decisiones.

Muestra ( n ) → inferencia → Población

\_

X = 8 estimado de µ = 7.5

Tomemos por ejemplo una compañía como Elly Lilly de

Puerto Rico. Si la empresa desea introducir un nuevo

producto al mercado, sería absurdo pretender que toda

la población pruebe el producto. En este caso, se da a

probar el producto a una muestra de consumidores y

con base a los resultados de esa muestra se decide si el

producto se elabora o no.

Ahora bien, como los resultados obtenidos a partir de

una muestra difieren de los resultados que se

obtendrían si se observara la población total o universo,

existe un riesgo al tomar la decisión. Es en este caso que

se utiliza la PROBABILIDAD como una medida de

riesgo.2

DEFINICIONES BASICAS

Experimento. Cualquier acción cuyo resultado se

registra como un dato.

Espacio Muestral ( S ). El conjunto de todos los posibles

resultados de un experimento.

Ejemplo. Supongamos el lanzar un dado al aire y

observaremos los resultados siguientes:

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } S = { 6 }

Ejemplo. En el lanzamiento de dos monedas tenemos;

S = { HH, HT, TH, TT } S = { 4 }

Evento. Es el resultado de un experimento.

Cuando cada evento es seleccionado al azar, el

experimento se denomina aleatorio o al azar.

Evento Simple ( E ). Cada uno de los posibles resultados

de un experimento y que no se puede descomponer.

En el caso del lanzamiento del dado, cada uno de los

posibles números en la cara del dado es un evento

simple.

Cuando los eventos se representan en un diagrama de

Venn ( ver más adelante ) se denominan puntos

muestrales.3

Evento Compuesto. Los eventos A, B, C, etc., son

eventos compuestos si se componen de dos o más

eventos simples.

Ejemplos de eventos simples y compuestos

Evento simple: Lanzamiento de un dado

A = { evento que salga un # impar }

A = { 1, 3, 5 }

B = { el número sea ≤ 4 } = { 1, 2, 3, 4 }

Evento Compuesto: Lanzamiento de dos monedas

A = el evento de observar una cara

A = {HH, HT, TH, TT }

Existen varias maneras de representar un espacio

muestral particular. Consideremos dos de ellas;

a) mediante una tabla de contingencia

b) mediante un diagrama de Venn

a. Tabla de Contingencia o de clasificación cruzada

En una tabla de frecuencia los datos se organizan de

modo que sólo consideramos una variable a la vez. A los

fines de estudiar de manera simultánea la repuesta de

dos variables categóricas, se utiliza lo que se conoce

como una tabla de contingencia. Para este tipo de tabla

se establece una clasificación cruzada entre las variables

analizadas. Por ejemplo, se puede relacionar mediante

una tabla de contingencia las variables sexo ( m, f ) y el

área de estudio (concentración); sexo y rango

académico; ventas de productos por área geográfica y

tipo de productos, etc.,4

El ejemplo que se presenta a continuación clasifica las

variables por rango académico y sexo.

RangoacadémicoSexo

Instructor Auxiliar Asociado Profesor

Hombre 100 170 80 50 400

Mujer 90 145 50 25 310

190 315 130 75 710

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Pregunta, ¿puedes construir una tabla de probabilidad

basado en la tabla de contingencia? Adelante!!!!!!!!!!!!

b. CONJUNTOS. Operaciones con Conjuntos

Un diagrama de Venn ayuda a visualizar un

experimento. Se representa por un diagrama

rectangular representando el espacio muestral

S y que contiene los eventos simples marcados por

E1, E2,……, E6 . Como un evento A es una colección de

eventos simples, los puntos muestrales de ese evento se

localizan en el interior del evento A ( E2, E3, E6 )

Unión. La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto

C que está formado por los elementos de A, de B o de

ambos.

A ∪ B = C { x / x , A, x , B o x , a ambos }5

Intersección. La intersección de dos conjuntos A y B es

el conjunto C que está formado por los elementos que

pertenecen a ambos conjuntos simultáneamente.

A ∩ B = C { x / x , A y x , B }

Complementos. El complemento de un conjunto A que

se denota por A

c

es el evento que consta de todos los

resultados en el espacio muestral que no están

contenidos en A.

A

c

= { x ∈ S x ∉ A }

A

c

+ A = S

Si dos conjuntos A y B no tienen elementos en común,

su intersección será nula o vacía. En este caso A y B se

dicen eventos mutuamente excluyentes.

A ∩ B = { Φ }

Técnicas de Conteo.

El análisis de los problemas de probabilidad se facilita a

través de métodos sistemáticos de conteo de los grupos y

arreglos de los datos.

Principio de Multiplicación:

Si un experimento puede describirse como una

secuencia de k pasos y en cada paso hay n1 resultados

en el primer paso, n2

resultados en el segundo paso, n36

resultados en el tercer paso, y así sucesivamente,

entonces el número de eventos que pueden ocurrir será,

(n1) • (n2) • (n3) • (n4) • • • • • • (nk)

Ejemplos.

1) Lanzar dos dados: (n1) • (n2) = ( 6 ) • ( 6 ) = 36

2) Suponga que se desea formar un comité de tres

miembros en el cuál se elegirá un presidente, un

vicepresidente y un tesorero. Hay dos candidatos para

la presidencia, 4 para la vicepresidencia y 3 para el

tesorero. ¿De cuántas formas se puede formar el

comité?

# de formas para escoger presidencia : 2

# de formas para escoger vicepresidencia : 4

# de formas para escoger el tesorero : 3

# formas para escoger las posiciones: 2 • 4 • 3 = 24

Definición de Factorial. El simbolo n! que se lee

“ n factorial “ se refiere al producto de todos los enteros

desde n hasta 1.

n ! = n ( n – 1 ) ( n – 2 ) ( n – 3 ) ……….3.2.1

definición: 0 ! = 1 ( cero factorial es 1 )

ejemplos; 5 ! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 ∴ 5 ! = 5 . 4 !

4 ! = 4 . 3 . 2 . 1 4 ! = 4 . 3 !

3 ! = 3 . 2 . 1 3 ! = 3 . 2 !

2 ! = 2 . 17

Muestras Ordenadas.

Permutación ( P ). Cada arreglo de datos donde el

orden es importante y que puede realizarse tomando

algunos datos o todos los datos contenidos en el grupo.

n = # de datos r = grupo tomado de n ( r < n )

Caso 1. ( n = r )

n Pn = n !

Ejemplo. Se tienen 6 máquinas de escribir y 6 personas

para operar las máquinas, ¿de cuántas

maneras se pueden asignar las personas a las

máquinas?

Solución: 6 P6 = 6 ! = 6 • 5 • 4 • 3 • 2 • 1 = 720

Ejemplo. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las

letras A, B, C tomándolas todas a la vez?

Solución: 3 P3 = 3 • 2 • 1 = 6 [ ABC, BCA, CAB, BAC,

CBA, ACB ]

Caso 2 ( r < n ). Muestras ordenadas sin repetición.

En éste caso cada observación se toma una sola vez,

porque la unidad después de observada no se regresa a

la población de donde proviene.

N Pn = N!

[N – n]!8

N- # de elementos diferentes disponibles (población)

n- # número de elementos tomados de N (muestra)

Ejemplo. Un examen de candidatura consta de 5 partes

que pueden obtenerse de un total de 10 temas. ¿de

cuántas maneras se pueden escoger las 5 partes?

10 P5 = 10!

[10 – 5]!

10 P5

= 10! = 5 ! = 120

5 !

Ejemplo.

Haga una lista de las permutaciones que

pueden formarse con los #s : 1, 2, 3 y 4 tomando dos a

la vez.

4 P2

= 4! = 4 • 3 • 2! = 12

(4- 2)! 2 !

Muestras no ordenadas sin repetición. Cuando el orden

en que se seleccionan los objetos no importa, tenemos lo

que se denomina una Combinación.

Combinaciones. Número de formas diferentes que se

pueden seleccionar n objetos de un total de N objetos

distintos sin importar el orden ( juego de póker, ej. ).

NCn = N ! / n ! ( N – n ) !9

Ejemplo.

Se dispone de 8 personas, 5 hombres y

3 mujeres, para formar un comité de 5 personas.

¿ de cuántas maneras se puede formar el comité si debe

incluir 3 hombres y 2 mujeres?

NCn = 8C 5

= [5C3 ][ 3C2

] = [ 5! / 3! ( 5-3)! ] [ 3! / 2! (3-2)!

NCn = 8C 5

= [ 10 ] [ 3 ] = 30

¿Qué significa la palabra probabilidad?

En general, la palabra se refiere a la posibilidad

relativa de que ocurra un evento.

Ejemplos,

a) la posibilidad de seleccionar una carta de un mazo

b) la posibilidad que un producto nuevo tenga

aceptación en el mercado

c) la posibilidad de que un estudiante seleccionado al

azar en una clase tenga un promedio de B

Probabilidad Clásica y Probabilidad Subjetiva.

La probabilidad clásica es aquella que se toma de

manera objetiva y que puede considerarse de dos

maneras: a priori y a posteriori.

Probabilidad a Priori. La probabilidad de un evento A,

P(A), es la medida del chance de que ese evento ocurra.10

En este caso los resultados del experimento son

igualmente probables. Este método fue desarrollado por

Laplace.

# de maneras que A puede ocurrir

P(A) = -------------------------------------------------

# total de resultados posibles

A

(eventos que corresponden a A )

P(A) = -----

S (eventos totales en el espacio muestral S )

Ejemplo. Se lanzan dos monedas al aire, ¿cuál es la

probabilidad de que ambas sean cara (H)?

S = { HH, HT, TH, TT } P ( HH ) = \_

Ejemplo. Se lanzan dos dados al aire, ¿cuál es la

probabilidad de que la suma sea mayor de 7?

S = { 36 } 1,1 1,2 1,3 1,4 …………… 6,1 6,2…. 6,6

P ( ∑ d > 7 ) = 15 / 36

Probabilidad a posteriori. En el caso que los eventos no

poseen igual posibilidad de ocurrencia, el problema de

asignar las probabilidades ocurre a posteriori.

El concepto de probabilidad a posteriori lo desarrolla

Richard Von Mises y está basado en el principio

siguiente:11

Si un experimento se realiza un número grande de

veces, N por ejemplo, y sea n el número de veces que

ocurre un evento E. Entonces, se observa

experimentalmente el hecho de que a medida N

aumenta la relación n / M tiende a un valor estable p.

Ese valor p se llama la probabilidad de E y se escribe

p(E).

El método a priori se conoce también como de

frecuencia relativa y es apropiado cuando se tienen los

datos para estimar la proporción del tiempo que

ocurrirá el evento en el experimento si el experimento se

repite un número grande de veces.

Ejemplo.

La tabla siguiente muestra el número de hornos

microondas vendidos por día en una tienda de ventas al

detal del área metropolitana de San Juan

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# de microhondas (E) # de días

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

0 15

1 48

2 25

3 22

4 10

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_12

Determinar la probabilidad de que el número de

microondas que se vendan actualmente sean:

a) 3 b) menos de 2 c) más de 1 d) por lo menos 2

e) entre 1 y 3 ambos incluidos f) exactamente 4

Probalidad Subjetiva. Se refiere a la probabilidad de

ocurrencia de un evento basado en la experiencia

previa, la opinión personal o la intuición del individuo.

En este caso después de estudiar la información

disponible, se asigna un valor de probabilidad a los

eventos basado en nuestro grado de creencia de que el

evento puede ocurrir.

Reglas Básicas de Probabilidades Para Eventos Simples.

1. Ley Fundamental de Probabilidad. Una probabilidad

siempre estará comprendida entre 0 y 1.

0 ≤ P(A) ≤ 1

2. ∑ P(A) = 1. La suma de las probabilidades de todos

los eventos simples posibles del espacio muestral es 1.

3. Ley del Complemento. Si A

c

es el complemento de A,

entonces,

P (A

c

) + P (A) = 1

P (A

c

) = 1 - P (A)

P (A) = 1 - P (A

c

)13

Definición. La probabilidad de un evento A cualquiera,

es igual a la suma de las probabilidades de los eventos

simples contenidos en A.

Por ejemplo, si las probabilidades de A1, A5, A4, A2, A3

son .10, .25, .05, .15, .08 respectivamente, entonces,

P(A) = 10 + .25 + .05 + .15 + .08 = .63

Proceso Para Calcular la Probabilidad de un Evento.

1) Haga una lista de todos los eventos contenidos en el

espacio muestral.

2) Asigne la probabilidad que corresponda a cada

evento simple.

3) Determine los eventos simples que constituyen el

evento de interés.

4) Sume las probabilidades de todos los eventos

simples que constituyen el evento de interés.

A1 A5

A4 A2

A314

Regla de Suma de Probabilidades

a. Eventos Mutuamente Excluyentes. Dos eventos A y B

son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir al

mismo tiempo.

P(A  B) = P(A) + P(B) [ P(A\_B) = 0 ]

b. Eventos No Mutuamente Excluyentes. Dos eventos A

y B son no mutuamente excluyentes si ambos pueden

ocurrir simultaneamente.

P(A  B) = P(A) + P(B) - P(A\_B)

Probabilidad Condicional e Independencia

En muchas ocasiones la probabilidad de que ocurra un

evento depende de lo que ha ocurrido con otro evento.

En este caso tenemos lo que se llama probabilidad

condicional.

Def. La probabilidad condicional de A, dado que ha

ocurrido el evento B, se escribe P(A/B). O sea, es la

probabilidad de que ocurra un evento A cuando se

conoce cierta información relacionada con la ocurrencia

de otro evento B.

P(A/B) probabilidad de que ocurra A dado que B ha

ocurrido.

P(B/A) probabilidad de que ocurra B dado que A ha

ocurrido.15

P(A/B) = P(A\_B) / P(B) probabilidad condicional de A

P(B/A) = P(A\_B) / P(A) probabilidad condicional de B

P(A\_B). Es la probabilidad conjunta porque denota la

intersección de dos eventos, A y B.

P(A) y P(B) se denominan probabilidades marginales

Eventos Independientes y Dependientes

Se dice que dos eventos son independientes si y solo si,

P(A/B) = P(A)

Se dice que dos eventos son dependientes si la

ocurrencia de uno de ellos afecta la ocurrencia del otro.

P(A/B) ≠ P(A)

Regla de Multiplicacion de Probabilidad

Esta regla de probabilidad se deriva de la definicion de

probabilidad condicional y utiliza el concepto de

interseccion de eventos para su aplicación.

a. Si A y B son eventos independientes, entonces,

P(A\_B) = P(A) • P(B)

b. Si A y B son eventos dependientes, entonces,

P(A\_B) = P(B) • P(A/B)

P(A\_B) = P(A) • P(B/A)16

Ejemplos de probabilidad.

Un importador de piñas recibe un cargamento de 500

cajas de la República Dominicana. Los datos de piñas

dañadas en cada caja se muestran a continuación. El

cálculo de las probabilidades correspondientes se

muestra en la columna (3).

(1) (2) (3)

Evento ( E ) # de cajas P ( E )

( # de piñas dañadas)

0 385 385 / 500 = .77

1 90 90 / 500 = .18

2 14 14 / 500 = .028

3 11 11 / 500 = .022

Ejemplo de probabilidad condicional.

La tabla a continuación nos presenta el ascenso a

catedráticos de los profesores de una institución

durante los últimos 5 años.

Tabla de Ascenso al rango de Catedrático

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Hombres Mujeres Totales

Ascendido A 278 26 304

No ascendido A' 662 194 856

Totales 940 220 1,160

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_17

En la tabla de las probabilidades las probabilidades

conjuntas aparecen en el interior de la tabla y las

probabilidades marginales en los márgenes. Estas

últimas se llaman probabilidades marginales.

Tabla de Probabilidades Conjunta

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Hombres Mujeres Totales

A .24 .02 .26

A' .57 .17 .74

Totales .81 .19 1.00

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

A- ascendido A'- no ascendido

¿cuál es la probabilidad de que un profesor

seleccionado al azar sea hombre (H) y fue ascendido?

P(H\_A) = 278 / 1160 = .24

¿cuál es la probabilidad de que un profesor

seleccionado al azar sea hombre (H) y no fue ascendido?

P(H\_A') = 662 / 1160 = .57

¿cuál es la probabilidad de que un profesor

seleccionado al azar sea mujer (M) fue ascendido?

P(M\_A) = 26 / 1160 = .0218

¿cuál es la probabilidad de que un profesor

seleccionado al azar sea mujer (M) y no fue ascendido?

P(M\_A') = 194 / 1160 = .17

Calculemos ahora las probabilidades condicionales.

a. probabilidad de que un profesor escogido al azar sea

ascendido dado que es hombre (H)

P(A/H) = 278 / 940 = .30

Alternativamente

P(A\_H) = P(H) • P(A/H)

P(A/H) = P(A\_H) = .24 / .81 = .30

P(H)

b. probabilidad de que un profesor escogido al azar sea

ascendido dado que es hombre (M)

P(A/M) = 26 / 220

Alternativamente P(A\_M) = P(M) • P(A/M)

P(A/M) = P(A\_M) = .02 / .19 = .12

P(M)

Nota. Hay una pequeña diferencia entre los dos valores

debido al redondeo.19

Ejercicios de Probabilidades para Solucionar

1. Una urna contiene 10 bolas, 6 blancas y 4 negras.

Si se saca una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad

de que la bola sea blanca? Repuesta .60

2. Se saca una carta de un mazo de 52 cartas,

a) la probabilidad de que la carta sea un rey ( .071 )

b) la probabilidad que sea un As de corazón rojo

( .019 )

c) la probabilidad que la carta sea negra ( .5 )

d) la probabilidad que la carta sea de espada (.25 )

3. Se saca una carta de un mazo de 52 cartas, ¿cuál

es la probabilidad de que sea un As o un Rey?

( .1538 )

4. Se saca una bola de una urna que contiene 12

bolas, 7 azules y 5 blancas, ¿cuál es la probabilidad

de que sea azul o blanca

5. Un individuo que entra a una farmacia tiene una

probabilidad de comprar pasta dental de .45, de

comprar desodorante de .35 y de comprar ambos

de .25. Si ese individuo entra a la farmacia, ¿cuál es

la probabilidad de que compre pasta dental o

desodorante? (.55)

6. Se saca una carta de un mazo de 52 cartas, ¿cuál

es la probabilidad de que se obtenga un As o una

carta roja? (.538)20

7. En la población de Puerto Rico se ha estimado que

la probabilidad de fumar es de .65 y la de fumar

ocasionalmente de .20, ¿cuál es la probabilidad de

no fumar para esa población?

8. En una universidad 40% poseen un diploma en el

idioma Francés, 30% poseen un diploma en el

idioma Italiano y 10% poseen un diploma en

ambos idiomas. Si se escoje un miembro de esa

comunidad al azar, ¿cuál es la probabilidad de que

posea un diploma de Francés o Italiano?

9. Suponga que un distribuidor de autos recibe 12

nuevos modelos, 8 automáticos y 4 estándares. Si se

venden cuatro autos el próximo mes, ¿cuál es la

probabilidad de que los autos vendidos sean dos

automáticos y dos estándares? ¿cuál es la

probabilidad de que los 4 sean o automáticos o

estándares? ( .33 ) y ( .1434 )

10. La probabilidad de que ocurra el evento A es .35,

la probabilidad de que ocurra el evento B es .10.

si A y B son eventos independientes, ¿cuál es la

probabilidad de que ocurra el evento [P(A  B]?

( .415 )

11. 55 porciento de las personas de Puerto Rico viven

en el área metropolitana de San Juan ( SJMA ).

Además, 70 porciento de esas personas se sienten

felices y 40 porciento de todas las personas de PR

viven en el SJMA y son felices.21

Demostrar si los eventos vivir en el SJMA y ser

felices son eventos dependientes o independientes.

12. Si los eventos A y B son mutuamente excluyentes y

si P(A) = .30 y P(B) = .45, determinar

P(A  B ) y P( A / B)

13. El 50% de las personas de una comunidad poseen

una cámara digital y una computadora. Además,

30% posee una computadora y 40% una cámara

digital. ¿Cuál es la probabilidad que si

seleccionamos una persona al azar posea una

cámara o una computadora?